



Edição Nº 6 – 28 de Abril de 2018

ISSN Print: 1646-9976 | ISSN Online: 2184-223X |

DOI: <https://doi.org/10.31112/kriativ-tech-2018-01-12>

<http://www.kriativ-tech.com>

<http://www.kriativ-tech.pt>

## Aplicação de um modelo matemático de natureza estocástica

Vítor Manuel Nobre Joaquim

Professor Adjunto do ISTECS

*ISTECS – Departamento de Estudos e Investigação em Tecnologias de Informação e Sociedade.*

[vmnjoaquim@gmail.com](mailto:vmnjoaquim@gmail.com)

### RESUMO

O objetivo do presente trabalho consiste em aplicar um modelo matemático dinâmico, de natureza estocástica, na simulação da taxa de adesão ao regadio público nacional.

Este modelo, ao incorporar um processo de ajustamento com mecanismo de correção de erros, permite identificar e simular a taxa de adesão ao longo do tempo, desde o curto ao longo prazo, através do operador matemático de desfazamento.

O ajustamento do modelo foi efetuado através do método inicialmente desenvolvido pelo matemático alemão Gauss (1775-1855).

### ABSTRACT

The objective of the present work is to apply a dynamic mathematical model, of stochastic nature, in the simulation of the adhesion rate to the national public irrigation system.

This model, by incorporating an adjustment process with error correction mechanism, allows the identification and simulation of the adhesion rate over time, from the short to the long term, through the mathematical lag operator.

The adjustment of the model was made using the method initially developed by the German mathematician Gauss (1775-1855).

### 1. Introdução

O planeamento de atividades económicas em áreas com forte influência de fatores aleatórios não se afigura tarefa fácil.

De entre essas atividades económicas, destaca-se o setor agrícola, fortemente influenciado por várias aleatoriedades, nomeadamente as climáticas para além das intrínsecas aos fatores de produção.

Nestes casos, os modelos estocásticos de simulação constituem um instrumento fundamental de projeção de tendências de variáveis importantes como, por exemplo, as que contribuem para o crescimento da produção de bens transacionáveis como são os provenientes da agricultura.

Dado que um dos fatores de crescimento da produtividade agrícola é o Regadio, é interessante simular, ao longo do tempo, a taxa de adesão ao Regadio, definida pela proporção da área beneficiada pelos aproveitamentos hidroagrícolas públicos efetivamente regada.

## 2. Desenvolvimento do Modelo

A simulação da taxa de adesão ao regadio vai ser desenvolvida através de um modelo dinâmico do tipo auto-regressivo [AR(1)], assim especificado:

$$Y_t = \alpha + \beta Y_{t-1} + \varepsilon_t,$$

onde:

Y = taxa de adesão

t = observação cronológica (1986, ..., 2008)

$\alpha, \beta$  = parâmetros, em que se assume a usual condição de estabilidade  $|\beta| < 1$ .

$\varepsilon$  = ruído, em que é suposto  $\varepsilon_t \sim iid(0, \sigma^2)$ .

Este modelo permite identificar e simular a taxa de adesão ao longo do tempo, desde o curto ao longo prazo. De facto, explicitando a variável  $Y_t$ , vem:

$$Y_t = [1/(1-\beta L)](\alpha + \varepsilon_t),$$

em que:

- L = operador de desfasamento ( $LY_t = Y_{t-1}$ ;  $L^s \varepsilon_t = \varepsilon_{t-s}$ , para  $s=1, 2, \dots$ ),
- $1/(1-\beta L)$  é a soma dos termos de uma série geométrica convergente,

ou seja:

$$Y_t = \alpha + \alpha\beta L + \alpha\beta^2 L^2 + \alpha\beta^3 L^3 + \dots + \varepsilon_t + \beta\varepsilon_{t-1} + \beta^2\varepsilon_{t-2} + \dots,$$

em que  $\lim_{s \rightarrow \infty} \partial Y_t / \partial \varepsilon_{t-s} = \lim_{s \rightarrow \infty} \beta^s = 0$ .

Assim, para  $L = 1$ , temos a seguinte distribuição temporal da taxa de adesão:

Quadro 1: Distribuição da taxa de adesão

Período	Curto prazo	1	2	..	Longo prazo
Taxa de adesão	$\alpha$	$\alpha\beta$	$\alpha\beta^2$	..	$\alpha/(1-\beta)$

O modelo incorpora um processo de ajustamento com mecanismo de correção de erros (MCE), em que o coeficiente de longo prazo,  $k=\alpha/(1-\beta)$ , representa a solução de equilíbrio. De facto, subtraindo

$Y_{t-1}$  em ambos os membros do modelo e substituindo  $\alpha$  por  $k(1-\beta)$ , tem-se:

$$\Delta Y_t = k(1-\beta) + (\beta - 1)Y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \text{em que}$$

$$\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1},$$

ou:

$$\Delta Y_t = -k(\beta - 1) + (\beta - 1)Y_{t-1} + \varepsilon_t,$$

donde:

$$\Delta Y_t = (\beta - 1)(Y_{t-1} - k) + \varepsilon_t,$$

em que  $(Y_{t-1} - k)$  é o erro de equilíbrio.

Dada a influência de  $\varepsilon_t$ , a taxa de adesão pode manter-se acima ou abaixo do coeficiente de longo prazo, durante algum tempo. Contudo, a tendência é para que essa taxa acabe por regressar à situação de equilíbrio, comportamento típico de qualquer série estacionária.

## 3. Ajustamento do Modelo

O ajustamento do modelo pelo método inicialmente desenvolvido pelo matemático alemão Gauss (1775-1855), com base em dados estatísticos do Sistema de Informação do Regadio, conduziu às seguintes simulações:

Quadro 2: Simulação da taxa de adesão ao regadio

```

Ordinary Least Squares Estimation
-----
Dependent variable is Y
22 observations used for estimation from 1987 to 2008
-----
Regressor      Coefficient      Standard Error      T-Ratio[Prob]
C              27.6992         11.3752             2.4351[.024]
Y(-1)         .54503         .18644             2.9234[.008]
-----
R-Squared      .29939         R-Bar-Squared      .26436
S.E. of Regression  5.5581         F-stat.  F( 1, 20)  8.5464[.008]
Mean of Dependent Variable  60.7727         S.D. of Dependent Variable  6.4802
Residual Sum of Squares  617.8454         Equation Log-likelihood  -67.9038
Akaike Info. Criterion  -69.9038         Schwarz Bayesian Criterion  -70.9948
DW-statistic  2.1913         Durbin's h-statistic  -.92479[.355]
-----

Diagnostic Tests
-----
* Test Statistics *      LM Version      * F Version      *
-----
* A:Serial Correlation*CHSQ( 1)= .77932[.377]*F( 1, 19)= .69777[.414]*
* B:Functional Form *CHSQ( 1)= 1.2102[.271]*F( 1, 19)= 1.1060[.306]*
* C:Normality *CHSQ( 2)= .67044[.715]* Not applicable
* D:Heteroscedasticity*CHSQ( 1)= 1.3591[.244]*F( 1, 20)= 1.3169[.265]*
-----
A:Lagrange multiplier test of residual serial correlation
B:Ramsey's RESET test using the square of the fitted values
C:Based on a test of skewness and kurtosis of residuals
D:Based on the regression of squared residuals on squared fitted values

```

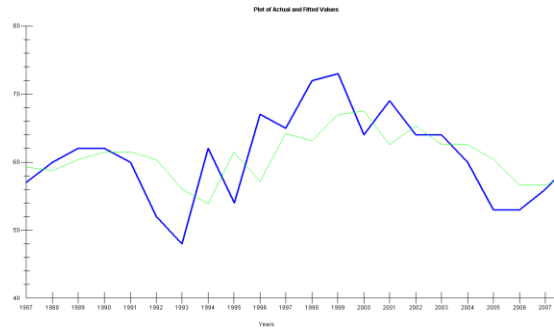


Figura 1: Valores observados e estimados

### Quadro 3: Significância dos parâmetros

```

Analysis of Function(s) of Parameter(s)
*****
Based on OLS regression of Y on:
C      Y(-1)
22 observations used for estimation from 1987 to 2008
*****
Coefficients A1 to A2 are assigned to the above regressors respectively.
List of specified functional relationship(s):
k=a1/(1-a2)
*****

```

Function	Estimate	Standard Error	T-Ratio(Prob)
k	60.8816	2.6058	23.3636 [.000]

```

*****

```

Os testes sobre o modelo evidenciam um bom ajustamento, na medida em que os “P-value” são consentâneos com as premissas teóricas relativas à sua especificação:

- Significância dos parâmetros, quer de curto quer de longo prazo
- Auto-correlação
- Homocedasticidade
- Forma funcional
- Normalidade
- Estabilidade

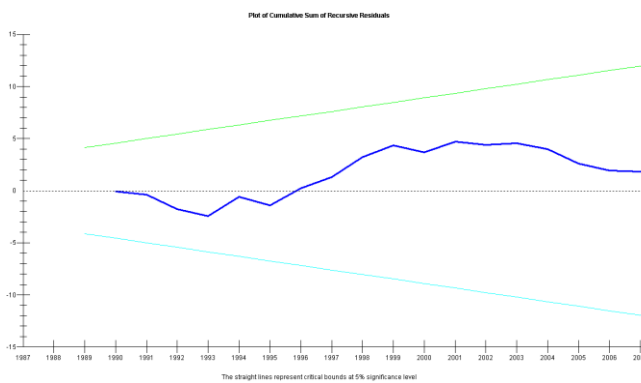


Figura 2: Teste CUSUM

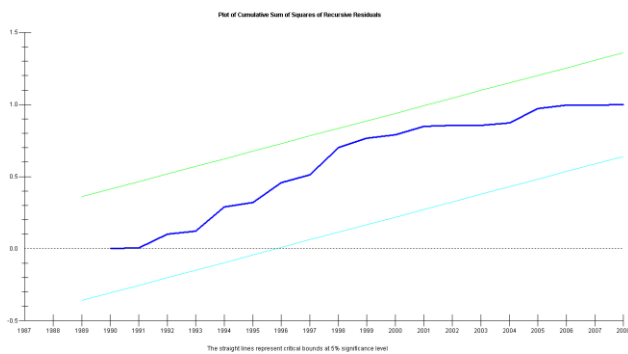


Figura 3: Teste CUSUM dos quadrados

#### 4. Resultados

Os resultados evidenciados pelo ajustamento do modelo permitem simular a seguinte distribuição temporal da taxa de adesão:

Quadro 4: Distribuição da taxa de adesão

Período	Curto Prazo	1	2	3	4	5	...	Longo prazo
Taxa de adesão (%)	27,7	15,1	8,2	4,5	2,4	1,3	...	...
Taxa de adesão acumulada (%)	27,7	42,8	51,0	55,5	57,9	59,2	...	60,9

É de realçar a elevada velocidade do ajustamento, já que, logo no primeiro ano, a taxa de adesão acumulada ao regadio representa cerca de 70% da taxa de longo prazo.

#### Referências

Bellman, R. E. (1957), "Dynamic programming", Princeton University Press.

Michalski, R. S., and Tecuci, G. (1994). "Machine learning: A multistrategy approach", Palo Alto: Morgan Kaufmann.

Pesaran, M. H. and Y. Shin, (1996), "Cointegration and the Speed of Convergence to Equilibrium", Journal of Econometrics, 71, pp. 117-43.

Pesaran, M. H. and L. J. Slater (1980), "Dynamic Regression: Theory and Algorithms", Ellis Horwood, Chichester.

Nelson, D.B. and C.Q. Cao (1992), "Inequality Constraints in the Univariate GARCH Model", Journal of Business and Economic Statistics, 10, pp. 229-35.

Ogaki, M. (1992), "Engle's Law and Cointegration", Journal of Political Economy, 100, pp. 1027-46.

Osterwald-Lenum, M. (1992), "A Note with Quantiles of the Asymptotic Distribution of the Maximum Likelihood Cointegration Rank Test Statistics", Oxford Bulletin of Economics and Statistics, 54, pp. 461-72.

Pagan, A.R. (1996), "The Econometrics of Financial Markets" Journal of Empirical Finance, 3, pp.15-102.

Pagan, A.R. and G.W. Schwert (1990), "Alternative Models for Conditional Stock Volatility", Journal of Econometrics, 45, pp. 267-90.

Perron, P. and J.Y. Campbell (1993), "A Note of Johansen's Cointegration Procedure when Trends are Present", Empirical Economics, 18, pp. 777-89.

Pesaran, B. and G. Wright (1995), "The Use of Spreads in Forecasting Medium Term U.K. Interest Rates", mimeo, University of East London.

Pesaran, M.H. (1972), Small Sample Estimation of Dynamic Economic Models", (unpublished PhD Thesis), Cambridge University.